Bemerkung zu einem Satz von A. N. Kolmogoroff

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem und $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$. A. N. KOLMOGOROFF hat den folgenden Satz bewiesen[1]):

Ist die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

fast überall $(C, 1)$*-summierbar, so ist die Folge* $\{s_{2^n}(x)\}$ *fast überall konvergent, wo* $s_n(x)$ *die* n*-te Partialsumme der Reihe* (1) *bezeichnet.*

In dieser Note werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Es sei* $N(\geqq 1)$ *eine beliebig angegebene natürliche Zahl. Mit* $\{n_k\}$ *wird die (wachsend angeordnete) Folge derjenigen natürlichen Zahlen bezeichnet, die in der Form* $2^{\nu_1} \pm 2^{\nu_2} \pm \cdots \pm 2^{\nu_r}$ *mit ganzzahligen Exponenten* $\nu_1 > \cdots > \nu_r \geqq 0$ $(1 \leqq r \leqq N)$ *geschrieben werden können. Sind die Bedingungen*

$$c_n \geqq c_{n+1} (> 0) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty \tag{3}$$

und

$$a_n = O(c_n) \tag{4}$$

erfüllt, und ist die Reihe (1) *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar, so konvergiert die Folge* $\{s_{n_k}(x)\}$ *fast überall.*

Beweis. Für $N = 1$ ist die Behauptung auf Grund des erwähnten Satzes von A. N. KOLMOGOROFF richtig.

---

[1]) A. N. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

Es sei $p(\geqq 1)$ eine natürliche Zahl. Nehmen wir an, daß für $N=p$ die Behauptung schon bewiesen ist; die entsprechende Indexfolge wird mit $\{n_k\}$ bezeichnet $(1=n_0<\cdots<n_k<\cdots)$. Es sei

$$\delta_k^2(x)=\sum_{i=0}^{\log(n_{k+1}-n_k)-1}(s_{n_k+2^i}(x)-s_{n_k}(x))^2 \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Auf Grund von (2) und (4) ergibt sich

$$\int_a^b \delta_k^2(x)\,dx=O(1)\sum_{i=0}^{\log(n_{k+1}-n_k)-1}(c_{n_k+1}^2+\cdots+c_{n_k+2^i}^2)=$$

$$=O(1)c_{n_k}^2\sum_{i=0}^{\log(n_{k+1}-n_k)-1}2^i=O(1)c_{n_k}^2(n_{k+1}-n_k).$$

Da $n_{k+1}\leqq 2n_k$ $(k=1,2,\ldots)$ ist, so gilt nach (2) und (3)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b \delta_k^2(x)\,dx=O(1)\sum_{k=1}^{\infty}c_{n_k}^2 n_k=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2<\infty.$$

Durch Anwendung des Satzes von B. Levi ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k^2(x)<\infty$$

fast überall, also gilt fast überall $\delta_k(x)\to 0$. Wegen

$$|s_{n_k+2^i}(x)-s_{n_k}(x)|\leqq \delta_k(x)$$

ergibt sich auf Grund der Induktionsannahme, daß die Folge $\{s_{n_k+2^i}(x)\}$ $(0\leqq i<\log(n_{k+1}-n_k);\ k=1,2,\ldots)$ fast überall konvergiert.

Es sei weiterhin

$$\bar{\delta}_k^2(x)=\sum_{i=0}^{\log(n_{k+1}-n_k)-1}(s_{n_{k+1}}(x)-s_{n_{k+1}-2^i}(x))^2 \qquad (k=0,1,\ldots).$$

Auf Grund von (2) und (4) gilt:

$$\int_a^b \bar{\delta}_k^2(x)\,dx=O(1)\sum_{i=0}^{\log(n_{k+1}-n_k)-1}(c_{n_{k+1}-2^i+1}^2+\cdots+c_{n_{k+1}}^2)=$$

$$=O(1)c_{n_k}^2\sum_{i=0}^{\log(n_{k+1}-n_k)-1}2^i=O(c_{n_k}^2 n_k),$$

und es ergibt sich wie oben $\bar{\delta}_k(x)\to 0$ fast überall. Da

$$|s_{n_{k+1}}(x)-s_{n_{k+1}-2^i}(x)|\leqq \bar{\delta}_k(x) \qquad (0\leqq i<\log(n_{k+1}-n_k);\quad k=0,1,\ldots)$$

überall gilt, so ergibt sich, daß die Folge $\{s_{n_{k+1}-2^i}(x)\}$ $(0 \leqq i < \log(n_{k+1}-n_k);$ $k=0, 1, \ldots)$ fast überall konvergiert. Also gilt die Behauptung auch für $N=p+1$.

Damit haben wir die Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 23. März 1960)